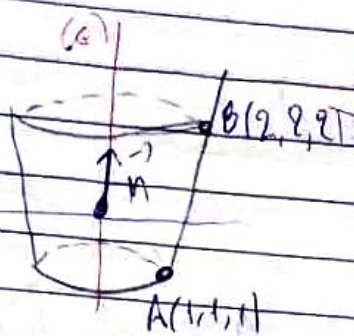


21/05/19

Φύλλο 10 Άσκηση 10

Να βρεθεί η εξίσωση της επιφάνειας που προκύπτει περιστρέφοντας την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(1,1,1)$, $B(2,2,2)$ γύρω από την ευθεία $(\epsilon): \begin{cases} 6x=3y=2z \end{cases}$



Λύση

Ας βρούμε πρώτα επίπεδο (Π) κάθετο στην ευθεία (ϵ) . Πρέπει να βρούμε ένα διάνυσμα $\parallel$ προς την (ϵ) . Η ευθεία (ϵ) γράφεται ως:

$$\begin{aligned} 6x &= 3y = 2z = t \\ x &= \frac{1}{6}t \\ y &= \frac{1}{3}t \\ z &= \frac{1}{2}t \end{aligned}$$

Παραμετρικά, η (ϵ) γράφεται $\vec{r}(t) = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right) t$

Ένα εφαπτόμενο στην (ϵ) είναι $\vec{n} = (1, 2, 3)$. Άρα $(\Pi): x + 2y + 3z = 0$

Οι κύκλοι που έχουν κέντρο στην (ϵ) και βρίσκονται σε επίπεδο κάθετο στην (ϵ) έχουν εξισώσεις:

$$\begin{aligned} K(\lambda, \rho): \begin{cases} x + 2y + 3z = \lambda \\ x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 \end{cases} \end{aligned}$$

Θα πρέπει να βρούμε για ποιες τιμές των λ, ρ οι κύκλοι $K(\lambda, \rho)$ τέμνουν την ευθεία που διέρχεται από τα A και B

Εύρεση ευθείας που διέρχεται από A και B

$$\vec{r}(t) = (1, 1, 1) + t(1, 1, 1) = (1+t, 1+t, 1+t) \Rightarrow \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+t \\ z = 1+t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = y \\ y = z \end{cases}$$

Για να βρούμε για ποια λ, ρ οι κύκλοι τέμνουν την ευθεία, θεωρούμε το σύστημα:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 \\ x + 2y + 3z = \lambda \\ x = y \\ y = z \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$$

$$x = \lambda/6$$

$$y = \lambda/6$$

$$z = \lambda/6$$

Με αναλοφία των x, y, z έχουμε:

$$3\lambda^2 = \rho^2 \Rightarrow \lambda^2 = \frac{1}{3}\rho^2$$

$$36$$

$$\Rightarrow x + 2y + 3z = 12 / (x^2 + y^2 + z^2)$$

Εξίσωση της επιφάνειας

11) Μια επιφάνεια έχει εξίσωση $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ Α.δ. ο είναι επιφάνεια περιστροφής. Στη συνέχεια να βρούμε ο άξονας και οι εξισώσεις μιας γενέτειρας

Λύση

Μια επιφάνεια εκ περιστροφής, γράφεται στη μορφή:
 $\phi(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2, ax+by+cz=0$

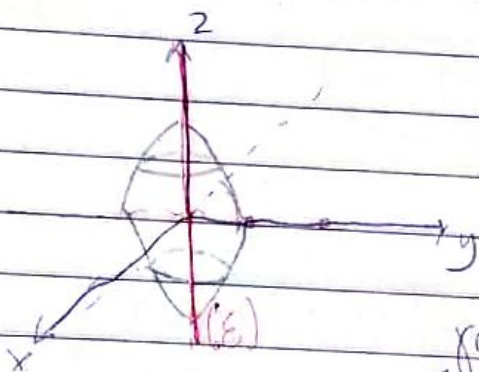
Μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση ως εξής:

$$b = x^2 + y^2 + z^2 - z^2 + 1 \cdot z^2 - 1$$

$$= x^2 + y^2 + z^2 - \frac{3}{4}z^2 - 1$$

Παρατηρούμε ότι η επιφάνεια γράφεται ως:
 $\phi(x^2 + y^2 + z^2, z) = 0$, όπου $\phi(A, B) = A - \frac{3}{4}B^2 - 1$

Έχουμε επιφάνεια εκ περιστροφής με άξονα ευθεία (ε) που περνάει από το σημείο (0,0,0) και κάθετη στο επίπεδο $z=0$



Για να βρούμε ποια καμπύλη περιστρέφουμε, γέρνουμε με ένα επίπεδο που περικλείει την (ε). Για παράδειγμα θεωρούμε το επίπεδο $x=0$. Άρα, η γενέτειρα καμπύλη $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2/4 = 1 \\ x=0 \end{cases}$ είναι ελλειψή στο επίπεδο yz.

13) Α.δ.ο. η εξίσωση $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz - x - y - z = 0$ παριστάνει επιφάνεια εκ περιστροφής.

Λύση

Θα πρέπει να γράψουμε την εξίσωση μας στη μορφή:
 $\phi(x^2 + y^2 + z^2, ax+by+cz) = 0$. Παρατηρούμε ότι:

$$(x+y+z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz + 3x^2y + 3xy^2 + 3x^2z + 3xz^2 + 3y^2z + 3yz^2$$

Ετσι, η εξίσωση γράφεται στη μορφή:

$$0 = (x+y+z)^3 - (x+y+z) - 9xyz - 9 - 3x^2y - 3xy^2 - 3x^2z - 3xz^2 - 3y^2z - 3yz^2$$

$$- 3xyz - 3xyz - 3xyz$$

$$0 = (x+y+z)^3 - (x+y+z) - 9 - 3xy(x+y+z) - 3xz(x+y+z) - 3yz(x+y+z) =$$

$$0 = (x+y+z)^3 - (x+y+z) - 9 - 3(x+y+z)(2xy+2xz+2yz) =$$

$$0 = \underbrace{(x+y+z)^3}_B - \underbrace{(x+y+z)}_B + 9 - \frac{3}{2} \underbrace{(x+y+z)}_B \underbrace{\left[(x+y+z)^2 - (x^2+y^2+z^2) \right]}_A$$

Αρα, η εξίσωση γράφεται ως: $\boxed{\phi(A, B) = B^3 - B - 9 - \frac{3}{2} B(B^2 - A)}$

με $A = x^2 + y^2 + z^2$, $B = x + y + z$

17. i) Παριστάνουν ~~πρόσ~~ B^3 οι παρακάτω εξισώσεις.

• $xz=0$, $xyz=0$

• $(x-1)^2 + (y+5)^2 = 0$

• $x^2 + 2y^2 + z^2 - 2x - 8y - 6z + 13 = 0$

• $x^2 - 2y^2 + z^2 - 2x + 8y - 6z - 3 = 0$

• $x^2 - 2y^2 - z^2 - 2x + 8y + 6z - 21 = 0$

• $2x^2 + y^2 = 1$

• $x/(x-1+y)(y-1)+z^3=0$

Λύση

- Η $xz=0$ είναι ένωση δύο επιπέδων $x=0$, $z=0$
- Η $xyz=0$ παριστάνει τμήν 3 επιπέδων $x=0$, $y=0$, $z=0$
- Η $(x-1)^2 + (y+5)^2 = 0$, παριστάνει ευθεία $\begin{cases} x=1 \\ y=-5, \text{ } t \in \mathbb{R} \\ z=t \end{cases}$

• Έχουμε $0 = x^2 + 2y^2 + z^2 - 2x - 8y - 6z + 13 = 0$
 $= x^2 - 2x + 2y^2 - 8y + z^2 - 6z + 13 = (x-1)^2 + 2(y-2)^2 + (z-3)^2 - 5$

εφαπτομένης

• Η $x^2 - 2y^2 - z^2 - 2x + 8y + 6z - 21 = 0$ με συμπλήρωση τετραγώνων:
 $= (x-1)^2 - 2(y-2)^2 - (z-3)^2 - 5$

• $0 = x^2 - 2y^2 + z^2 - 2x + 8y - 6z - 3 = (x-1)^2 - 2(y-2)^2 + (z-3)^2 - 5$

• $2x^2 + y^2 = 1$, είναι ελλειπτικός ωήνιμπος (Αν από μία εξίσωση A και κάποια μεταβλητή τότε έχουμε ωήνιμπος)

$$x \cdot (x-1+y) \cdot (y-1) + z^3 = 0$$

$$\begin{aligned} &= (x+(y-1)) \cdot (y-1) + z^3 = (x^2 + x(y-1)) \cdot (y-1) + z^3 + x^2 \cdot (y-1) + x \cdot (y-1)^2 + z^3 \\ &= x^2 y + x y^2 + z^3 \quad (*) \end{aligned}$$

Άρα, μπορούμε να γράψουμε την $(*)$ στη μορφή $f(x, y, z) = 0$, όπου f πολυώνυμο βαθμού 3. Άρα, είναι κωνική επιφάνεια με κορυφή το σημείο $K(0, 1, 0)$